Devoir maison n$^{\text{o}}$ 6

À rendre le lundi 18 ou le vendredi 22 novembre

Extrait d'un rapport du jury du CCINP : « *Le futur candidat doit s'appliquer à donner tous les arguments, même simples, conduisant à une conclusion. Nous lui conseillons de s'approprier petit à petit le cours par la pratique des exercices et des problèmes, de travailler les techniques habituelles et surtout de s'entraîner régulièrement à rédiger des questions de manière claire, explicite et structurée.* »

Exercice 1. (*CCINP TPC 2023*)
Soient les deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note respectivement f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés à A et B.
L'application identité de $\mathbb{R}^3$ est notée id et sa matrice associée est notée I.

1. a) Déterminer $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})$.
   b) Calculer A^2.
   c) En déduire que f est une symétrie vectorielle dont on précisera les éléments caractéristiques.
2. a) Montrer que l'application g est bijective.
   b) Déterminer B^{-1}.

Exercice 2. (*Un peu de calcul*)
On désigne par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{K}_3[X]$. Pour $a \in \mathbb{K}$, on définit la famille $\mathcal{F}_a = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ d'éléments de $\mathbb{K}_3[X]$ par

$$P_0 = a + aX^2 - X^3, \qquad P_1 = 1 - 6X + X^2 - aX^3, \qquad P_2 = -aX - aX^2 + X^3, \qquad P_3 = 1 + aX + X^2.$$

1. Montrer que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_a) = -a(a-2)(a^2 + 2a + 3)$.
2. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$, la famille $\mathcal{F}_a$ est-elle une base de $\mathbb{R}_3[X]$?
3. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{C}$, la famille $\mathcal{F}_a$ est-elle une base de $\mathbb{C}_3[X]$?

Exercice 3. [Facultatif]
Soient a, b et c trois réels distincts et $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Le but de cet exercice est de calculer le déterminant de la matrice de taille n :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \cdots & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. De plus, pour tout réel x, on définit $P(x) = \det(M - xJ)$.

1. Justifier que $P(x)$ est de la forme $\alpha x + \beta$ où α et β sont deux réels ne dépendant pas de x.
2. Calculer $P(b)$ et $P(c)$. En déduire les valeurs de α et β.
3. En déduire la valeur de $\det(M)$ en fonction de a, b, c et n.